TITLE:
カオス的挙動を示す厳密にとけるモデルII

AUTHOR(S):
福田, 亙; 桂, 重俊

CITATION:
福田, 亙 ...[et al]. カオス的挙動を示す厳密にとけるモデルII. 物性研究 1985, 44(3): 387-396

ISSUE DATE:
1985-06-20

URL:
http://hdl.handle.net/2433/91618

RIGHT:

京都大学学術情報リポジトリ
KURENAI 紅
Kyoto University Research Information Repository

物性研究 44 － 3 (1985－6)

カオス的挙動を示す厳密にとけるモデル II

東北大・工・応物　福田　亙，桂　重俊

(1985 年 3 月 15 日　受理)

1. 先の論文[1]で我々は，カオス的な挙動を示す厳密に解ける一次元マッピング ($x_{n+1} = f(x_n)$) について報告した。またその厳密解と数値計算による解をもとに計算精度の重要性を述べた。本論文では，厳密解の求まる二次元マッピングの例を示すとともに，再度数値計算における計算精度の問題について述べる。

2. 一次元マッピングと同様に，二次元マッピング

$$x_{n+1} = f_1(x_n,\ y_n)$$
$$y_{n+1} = f_2(x_n,\ y_n)$$

についても，その解が複雑な様相を示すことが知られている。解を求めるには，一般にある初期値を与えて数値計算を行なう。しかし，一，二次元マッピングの解は初期値に大きく依存する。初期値によってカオス的なふるまいを示したり，周期性を示したりするのである。[1] しかも与える初期値の精度とともに数値計算の計算誤差が解の挙動に大きな影響を及ぼす。この点を check するためには厳密解の求められる例が存在することが望ましい。本節では，楕円関数[2)]の二重周期性を利用し，周期解およびカオス解が厳密解として得られる二次元マッピングを求めたのでその例を示す。

Ex. 1

$$x_{n+1} = \frac{B_n}{A_n}\ ,\quad y_{n+1} = \frac{C_n}{A_n}$$

$$\begin{aligned}A_n \equiv (&k^2x_n^4 + 2k^2x_n^2y_n^2 - 2k^2x_n^2 + k^2y_n^4 + 2k^2y_n^2 + k^2 + 2kx_n^2 \\ &- 2ky_n^2 - 2k + 1)(k^2x_n^4 + 2k^2x_n^2y_n^2 - 2k^2x_n^2 + k^2y_n^4 + 2k^2y_n^2 \\ &+ k^2 - 2kx_n^2 + 2ky_n^2 + 2k + 1)\end{aligned}$$

$$B_{\mathrm{n}} \equiv (-k^2 x_{\mathrm{n}}^4 - 2k^2 x_{\mathrm{n}}^2 y_{\mathrm{n}}^2 + 2k^2 x_{\mathrm{n}}^2 - k^2 y_{\mathrm{n}}^4 - 2k^2 y_{\mathrm{n}}^2 - k^2 - 2x_{\mathrm{n}}^2$$
$$+ 2y_{\mathrm{n}}^2 + 1)(k^2 x_{\mathrm{n}}^4 + 2k^2 x_{\mathrm{n}}^2 y_{\mathrm{n}}^2 - 2k^2 x_{\mathrm{n}}^2 + k^2 y_{\mathrm{n}}^4$$
$$+ 2k^2 y_{\mathrm{n}}^2 + k^2 - 1)$$

$$C_{\mathrm{n}} \equiv 4 x_{\mathrm{n}} y_{\mathrm{n}} (k^2 x_{\mathrm{n}}^4 + 2k^2 x_{\mathrm{n}}^2 y_{\mathrm{n}}^2 + k^2 y_{\mathrm{n}}^4 - k^2 + 1)$$

$[0 \leq k \leq 1]$

厳密解：

$$x_{\mathrm{n}} = \frac{\mathrm{cn}(u_{\mathrm{n}}, k)\,\mathrm{cn}(v_{\mathrm{n}}, k')}{1 - \mathrm{sn}^2(v_{\mathrm{n}}, k')\,\mathrm{dn}^2(u_{\mathrm{n}}, k)}$$

$$y_{\mathrm{n}} = \frac{-\mathrm{sn}(u_{\mathrm{n}}, k)\,\mathrm{sn}(v_{\mathrm{n}}, k')\,\mathrm{dn}(u_{\mathrm{n}}, k)\,\mathrm{dn}(v_{\mathrm{n}}, k')}{1 - \mathrm{sn}^2(v_{\mathrm{n}}, k')\,\mathrm{dn}^2(u_{\mathrm{n}}, k)}$$

ただし $u_{\mathrm{n}} \equiv 2^{\mathrm{n}} u_0$,　$v_{\mathrm{n}} \equiv 2^{\mathrm{n}} v_0$,　$k' = \sqrt{1-k^2}$

Ex.2

$$x_{\mathrm{n}+1} = \frac{B_{\mathrm{n}}}{A_{\mathrm{n}}}, \quad y_{\mathrm{n}+1} = \frac{C_{\mathrm{n}}}{A_{\mathrm{n}}}$$

$$A_{\mathrm{n}} \equiv (k^2 x_{\mathrm{n}}^2 + k^2 y_{\mathrm{n}}^2 + 2k x_{\mathrm{n}} + 1)^2 (k^2 x_{\mathrm{n}}^2 + k^2 y_{\mathrm{n}}^2 - 2k x_{\mathrm{n}} + 1)^2,$$

$$B_{\mathrm{n}} \equiv 4(k^6 x_{\mathrm{n}}^7 - k^6 x_{\mathrm{n}}^6 + 3k^6 x_{\mathrm{n}}^5 y_{\mathrm{n}}^2 - k^6 x_{\mathrm{n}}^4 y_{\mathrm{n}}^2 + 3k^6 x_{\mathrm{n}}^3 y_{\mathrm{n}}^4 + k^6 x_{\mathrm{n}}^2 y_{\mathrm{n}}^4$$
$$+ k^6 x_{\mathrm{n}} y_{\mathrm{n}}^6 + k^6 y_{\mathrm{n}}^6 - k^4 x_{\mathrm{n}}^6 - k^4 x_{\mathrm{n}}^5 - k^4 x_{\mathrm{n}}^4 y_{\mathrm{n}}^2 + 2k^4 x_{\mathrm{n}}^4 - 6k^4 x_{\mathrm{n}}^3 y_{\mathrm{n}}^2$$
$$+ k^4 x_{\mathrm{n}}^2 y_{\mathrm{n}}^4 + 4k^4 x_{\mathrm{n}}^2 y_{\mathrm{n}}^2 - 5k^4 x_{\mathrm{n}} y_{\mathrm{n}}^4 + k^4 y_{\mathrm{n}}^6 + 2k^4 y_{\mathrm{n}}^4 + 2k^2 x_{\mathrm{n}}^4 - k^2 x_{\mathrm{n}}^3$$
$$+ 4k^2 x_{\mathrm{n}}^2 y_{\mathrm{n}}^2 - k^2 x_{\mathrm{n}}^2 - 5k^2 x_{\mathrm{n}} y_{\mathrm{n}}^2 + 2k^2 y_{\mathrm{n}}^4 + k^2 y_{\mathrm{n}}^2 - x_{\mathrm{n}}^2 + x_{\mathrm{n}} + y_{\mathrm{n}}^2),$$

$$C_{\mathrm{n}} \equiv 4y_{\mathrm{n}}(-k^2 x_{\mathrm{n}}^2 + 2k^2 x_{\mathrm{n}} - k^2 y_{\mathrm{n}}^2 - 1)(k^2 x_{\mathrm{n}}^2 + k^2 y_{\mathrm{n}}^2 - 2x_{\mathrm{n}} + 1)$$
$$\times (k^2 x_{\mathrm{n}}^2 + k^2 y_{\mathrm{n}}^2 - 1),$$

$[0 \leq k \leq 1]$

厳密解：
$$x_n = \frac{\mathrm{sn}^2(u_n,k)\,\mathrm{dn}^2(v_n,k') - \mathrm{sn}^2(v_n,k')\,\mathrm{cn}^2(u_n,k)\,\mathrm{cn}^2(v_n,k')\,\mathrm{dn}^2(u_n,k)}{(1-\mathrm{sn}^2(v_n,k')\,\mathrm{dn}^2(u_n,k))^2}$$

$$y_n = \frac{2\,\mathrm{sn}(u_n,k)\,\mathrm{sn}(v_n,k')\,\mathrm{cn}(u_n,k)\,\mathrm{cn}(v_n,k')\,\mathrm{dn}(u_n,k)\,\mathrm{dn}(v_n,k')}{(1-\mathrm{sn}^2(v_n,k')\,\mathrm{dn}^2(u_n,k))^2}$$

ただし　$u_n \equiv 2^n \cdot u_0$,　$v_n \equiv 2^n \cdot v_0$,　$k' = \sqrt{1-k^2}$

Ex. 3　$x_{n+1} = \dfrac{B_n}{A_n}$,　$y_{n+1} = \dfrac{C_n}{A_n}$

$$A_n \equiv (k^2x_n^2 - 2k^2x_n + k^2y_n^2 + k^2 + 2kx_n - 2k + 1)^2 (k^2x_n^2 - 2k^2x_n + k^2y_n^2 + k^2 - 2kx_n + 2k + 1)^2$$

$$\begin{aligned} B_n \equiv (&k^4x_n^4 - 4k^4x_n^3 + 2k^4x_n^2y_n^2 + 6k^4x_n^2 - 4k^4x_ny_n^2 - 4k^4x_n \\ &+ k^4y_n^4 + 2k^4y_n^2 + k^4 + 2k^2x_n^3 + 2k^2x_n^2y_n - 6k^2x_n^2 + 2k^2x_ny_n^2 \\ &+ 6k^2x_n + 2k^2y_n^3 - 2k^2y_n^2 - 2k^2y_n - 2k^2 - 2x_n + 2y_n + 1) \\ \times(&k^4x_n^4 - 4k^4x_n^3 + 2k^4x_n^2y_n^2 + 6k^4x_n^2 - 4k^4x_ny_n^2 - 4k^4x_n + k^4y_n^4 \\ &+ 2k^4y_n^2 + k^4 + 2k^2x_n^3 - 2k^2x_n^2y_n - 6k^2x_n^2 + 2k^2x_ny_n^2 + 6k^2x_n \\ &- 2k^2y_n^3 - 2k^2y_n^2 + 2k^2y_n - 2k^2 - 2x_n - 2y_n + 1) \end{aligned}$$

$$C_n \equiv 4y_n(-k^2x_n^2 + 2k^2x_n - k^2y_n^2 - k^2 - 2x_n + 1)(k^2x_n^2 - 2k^2x_n + k^2y_n^2 + k^2 - 1)(k^2x_n^2 + k^2y_n^2 - k^2 + 1)$$

$[0 \leq k \leq 1]$

厳密解：
$$x_n = \frac{\mathrm{cn}^2(u_n, k)\,\mathrm{cn}^2(v_n, k') - \mathrm{sn}^2(u_n, k)\,\mathrm{sn}^2(v_n, k')\,\mathrm{dn}^2(u_n, k)\,\mathrm{dn}^2(v_n, k')}{(1 - \mathrm{sn}^2(v_n, k')\,\mathrm{dn}^2(u_n, k))^2}$$

$$y_n = \frac{-2\,\mathrm{sn}(u_n, k)\,\mathrm{sn}(v_n, k')\,\mathrm{cn}(u_n, k)\,\mathrm{cn}(v_n, k')\,\mathrm{dn}(u_n, k)\,\mathrm{dn}(v_n, k')}{(1 - \mathrm{sn}^2(v_n, k')\,\mathrm{dn}^2(u_n, k))^2}$$

ただし　$u_n \equiv 2^n u_0$，　$v_n \equiv 2^n v_0$，　$k' \equiv \sqrt{1-k^2}$

Ex. 4

$$x_{n+1} = \frac{B_n}{A_n}, \qquad y_{n+1} = \frac{C_n}{A_n}$$

$$A_n \equiv (k^2 + 2kx_n - 2k + x_n^2 - 2x_n + y_n^2 + 1)^2 (k^2 - 2kx_n + 2k + x_n^2 - 2x_n + y_n^2 + 1)^2$$

$$\begin{aligned} B_n \equiv\, & (2k^4x_n + 2k^4y_n - k^4 - 2k^2x_n^3 + 2k^2x_n^2y_n + 6k^2x_n^2 - 2k^2x_ny_n^2 \\ & - 6k^2x_n + 2k^2y_n^3 + 2k^2y_n^2 - 2k^2y_n + 2k^2 - x_n^4 + 4x_n^3 - 2x_n^2y_n^2 \\ & - 6x_n^2 + 4x_ny_n^2 + 4x_n - y_n^4 - 2y_n^2 - 1)(2k^4x_n - 2k^4y_n - k^4 \\ & - 2k^2x_n^3 - 2k^2x_n^2y_n + 6k^2x_n^2 - 2k^2x_ny_n^2 - 6k^2x_n - 2k^2y_n^3 \\ & + 2k^2y_n^2 + 2k^2y_n + 2k^2 - x_n^4 + 4x_n^3 - 2x_n^2y_n^2 - 6x_n^2 + 4x_ny_n^2 \\ & + 4x_n - y_n^4 - 2y_n^2 - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_n \equiv\, & 4k^2y_n(-2k^2x_n + k^2 - x_n^2 + 2x_n - y_n^2 - 1)(-k^2 + x_n^2 - 2x_n \\ & + y_n^2 + 1)(k^2 + x_n^2 + y_n^2 - 1) \end{aligned}$$

〔$0 \leq k \leq 1$〕

厳密解：　$$x_n = \frac{\mathrm{cn}^2(u_n,k')\,\mathrm{dn}^2(u_n,k)\,\mathrm{dn}^2(v_n,k') - k^4\,\mathrm{sn}^2(u_n,k)\,\mathrm{sn}^2(u_n,k')\,\mathrm{cn}^2(u_n,k)}{(1-\mathrm{sn}^2(v_n,k')\,\mathrm{dn}^2(u_n,k))^2}$$

$$y_n = \frac{-2k^2\,\mathrm{sn}(u_n,k)\,\mathrm{sn}(v_n,k')\,\mathrm{cn}(u_n,k)\,\mathrm{cn}(v_n,k')\,\mathrm{dn}(u_n,k)\,\mathrm{dn}(v_n,k')}{(1-\mathrm{sn}^2(v_n,k')\,\mathrm{dn}^2(u_n,k))^2}$$

ただし　$u_n \equiv 2^n u_0$，　$v_n \equiv 2^n v_0$，　$k' = \sqrt{1-k^2}$

Ex. 5

$$x_{n+1} = 2x_n^2 - 2y_n^2 - 1$$

$$y_{n+1} = 4x_n y_n$$

厳密解：　$x_n = \cos(u_n)\cosh(v_n)$

$y_n = -\sin(v_n)\sinh(v_n)$

ただし，　$v_n = 2^n u_0$，　$v_n = 2^n v_0$

Ex. 6

$$x_{n+1} = 4x_n(1-x_n) + 4y_n^2$$

$$y_{n+1} = 4y_n(1-2x_n)$$

厳密解：　$x_n = \sin^2(u_n)\cosh^2(v_n) - \cos^2(u_n)\sinh^2(v_n)$

$y_n = 2\sin(u_n)\cos(u_n)\sinh(v_n)\cosh(v_n)$

ただし，　$u_n = 2^n \cdot u_0$，　$v_n = 2^n v_0$

Ex. 7

$$x_{n+1} = (2x_n - 2y_n - 1)(2x_n + 2y_n - 1)$$

$$y_{n+1} = 4y_n(2x_n - 1)$$

厳密解：　$x_n = \cos^2(u_n)\cosh^2(v_n) - \sin^2(u_n)\sinh^2(v_n)$

$y_n = -2\sin(u_n)\cos(u_n)\sinh(v_n)\cosh(v_n)$

ただし，$u_n = 2^n \cdot u_0$，　$v_n = 2^n \cdot v_0$

Ex. 5 ～ 7 は，Ex. 1 ～ 3 において $k = 0$ とした例である。

Fig. 1，2 には，これらのモデルのマッピングの様子をいくつか示した。

Fig. 1 は，非周期的なカオス的な挙動を示す解をもつように初期値を与えた場合。Fig. 2 は，周期解をもつように初期値を与えた場合である。

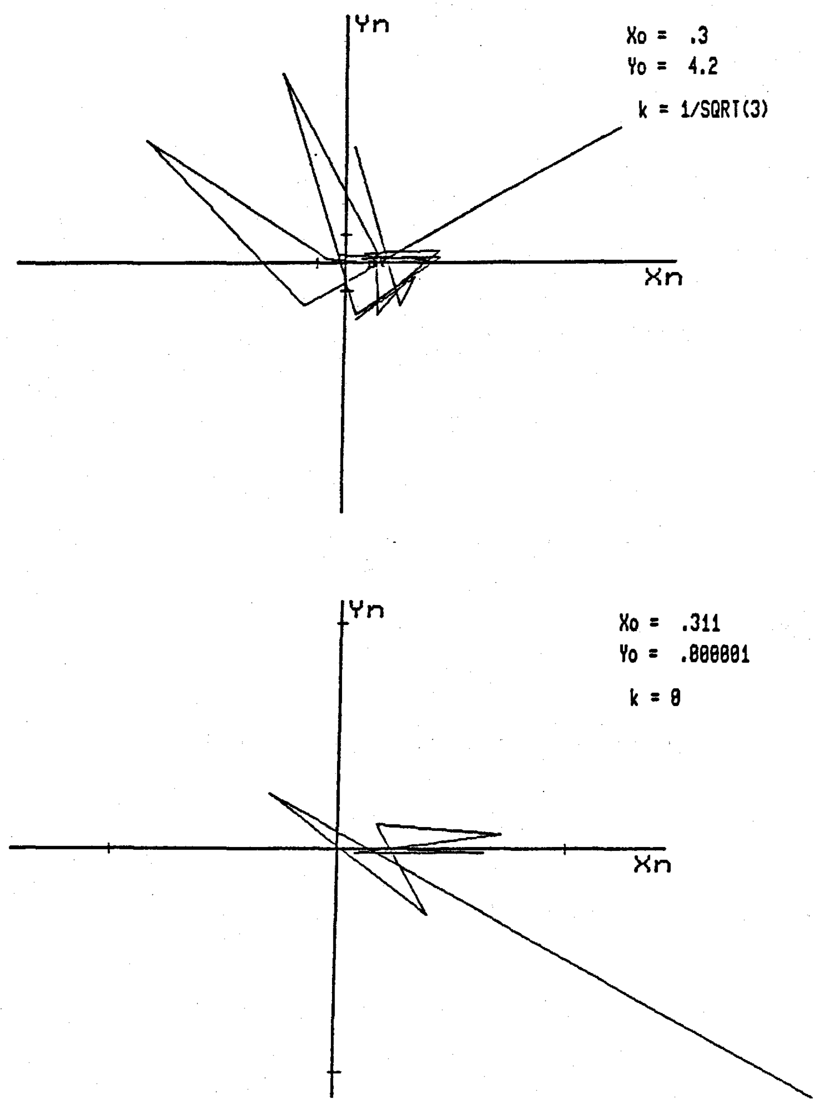

Fig. 1　カオス解の例。
a）Ex. 2，$k = 1/\sqrt{3}$，$x_0 = 0.3$，$y_0 = 4.2$
b）Ex. 7，$k = 0$，$x_0 = 0.311$，$y_0 = 0.000001$

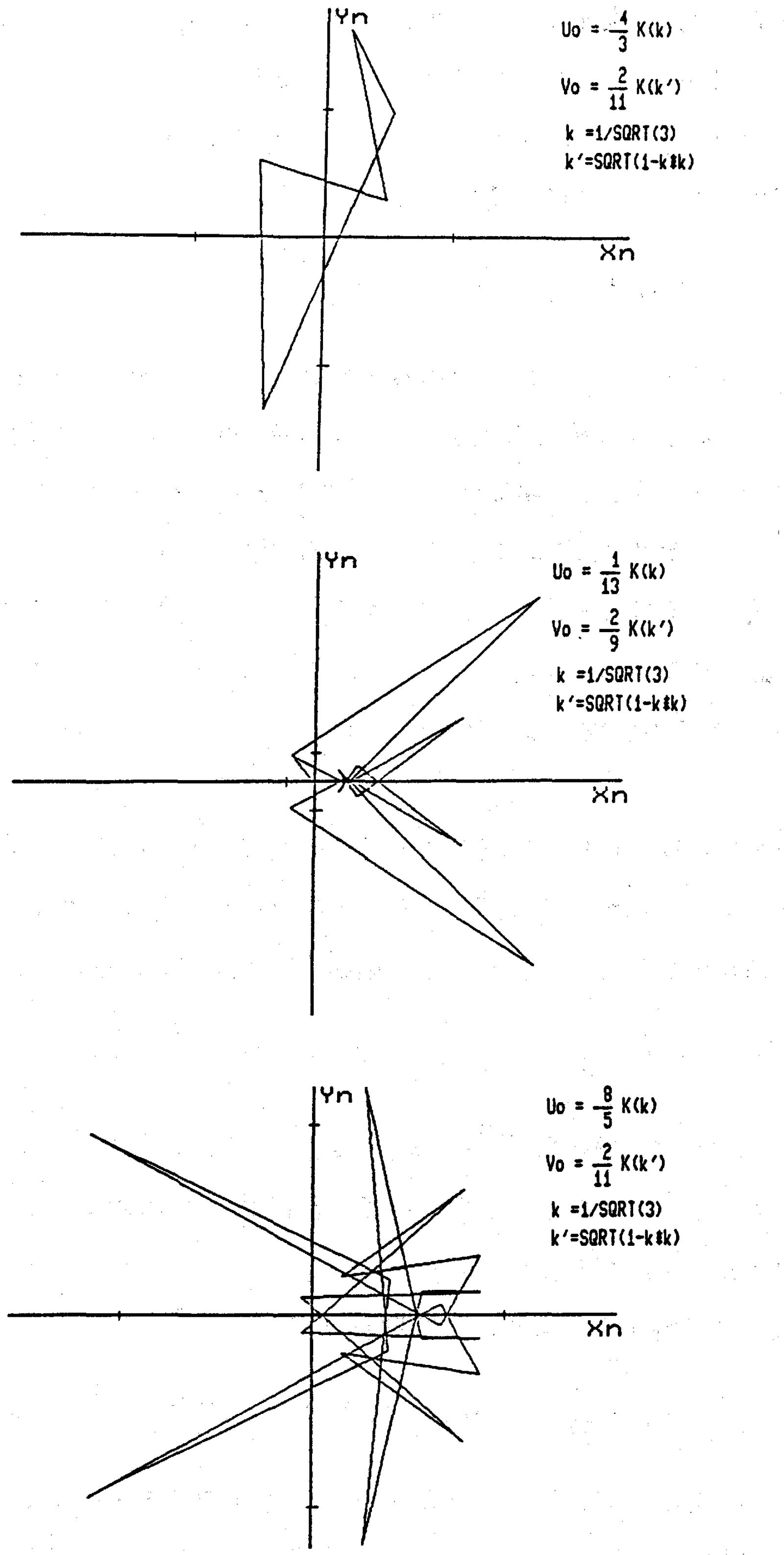

Fig. 2　周期解の例。

a)　Ex. 1,　$k=1/\sqrt{3}$,　$u_0=\frac{4}{3}K(k)$,　$v_0=\frac{2}{11}K(k')$, 周期 5

b)　Ex. 2,　$k=1/\sqrt{3}$,　$u_0=\frac{1}{13}K(k)$,　$v_0=\frac{2}{9}K(k')$, 周期 12

c)　Ex. 4.　$k=1/\sqrt{3}$.　$u_0=\frac{8}{5}K(k)$,　$v_0=\frac{2}{11}K(k')$, 周期 20

Ex. 1～7では，二次元マッピング $x_{n+1}=f_1(x_n, y_n)$，$y_{n+1}=f_2(x_n, y_n)$ の解が $x_n=\mathrm{Re}\,h_n$，$y_n=\mathrm{Im}\,h_n$ と表わされている。ここで $h_n\equiv h(w_n, k)$ で，h は楕円関数，w_n は等比級数 $w_n=r^n w_0$（r は整数），$w_0=u_0+iv_0$ である。

これら二次元マッピングに初期条件として

$$w_0=u_0+\mathrm{i}v_0=\frac{q}{p}K(k)+\mathrm{i}\frac{q'}{p'}K(k')$$

（p，q 及び p'，q' は互いに素な整数，$K(k)$ は第一種完全楕円積分）

を満たすように u_0, v_0 の値を設定すると，解は周期解となり，その周期は p と p' によって一意的に定まる。w_0 がこの初期条件を満たさない場合（q/p，q'/p' の少なくとも一方が無理数の場合）は，解は非周期的になりカオス的挙動を示す。

一般に，厳密に解ける一次元マッピング $Z_{n+1}=f(Z_n)$ より，その実数部及び虚数部をとることにより厳密に解ける二次元マッピングが得られるが，二次元マッピングが周期解をもつためには $f(z)$ が楕円関数でなければならない。

3. これらのモデルは，初期値に対して非常に敏感であると同時に，数値計算の誤差の影響も非常に受けやすく，見かけの周期が正しい周期と異なったり，カオス的であるべきものが，見かけの周期を示したりする。この事は前論文[1)]で述べておいたが，一次元マッピング

$$x_{n+1}=4x_n(1-x_n),\quad 0\leq x_n\leq 1 \cdots\cdots (1)$$

で例示しよう。(1)式の厳密解[3),1)]は，$x_n=\sin^2(2^n\sin^{-1}\sqrt{x_0})$ であるが，数値計算にはこれを用いず，(1)式で行なう。また，以下の数値計算の精度は，すべて有効桁数を8桁とし，9桁めを四捨五入したものである。

(1)式が周期解をもつように，初期値 x_0 を

$$x_0=\sin^2\left(\frac{3}{11}\pi\right)=0.5711574191366425\cdots\cdots$$

ととれば，(1)は周期5をもつが，いま x_0 として上記の値を8桁まで求めた値 0.57115741 を用いて数値計算すると，20ステップ前後で近似的周期解からずれ始め非周期解となる（Fig. 3－(a)）。しかし，1636ステップから新たに周期419の周期解になる（Fig. 3－(b)）。この新しい周期解は変化することなく安定に存在する（Fig. 3－(c)）。

次に(1)式が，カオス解をもつように初期値を

$$x_0=0.09999999$$

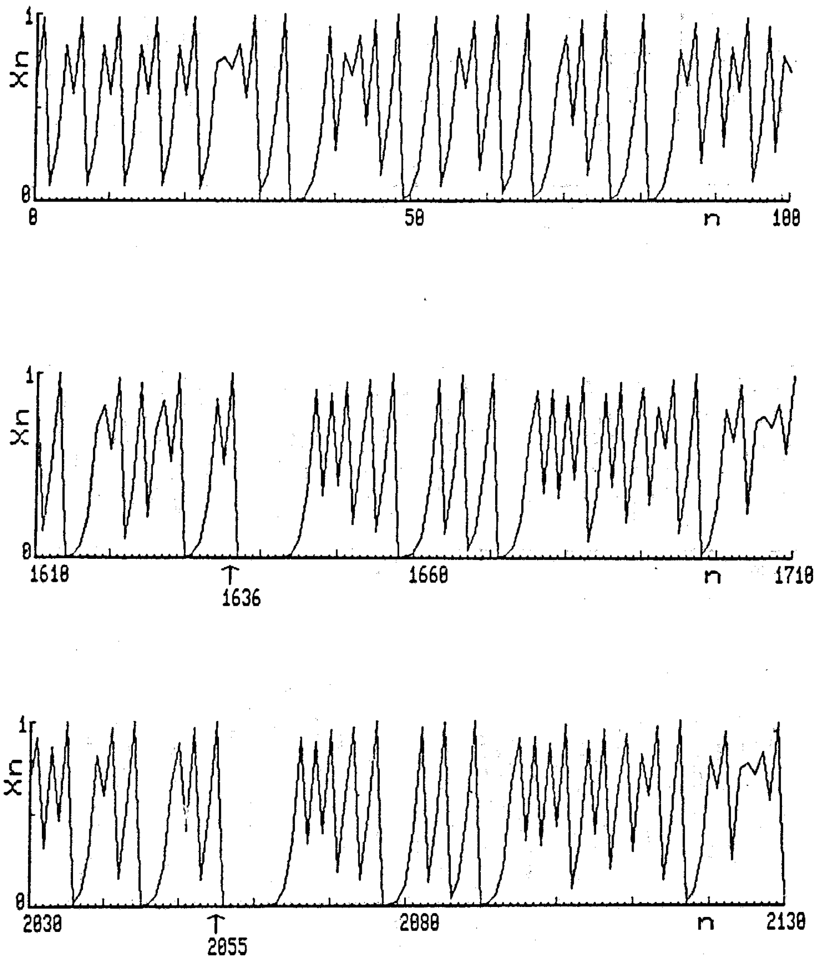

Fig.3　周期解をもつように初期値 $x_0=0.57115741\,(\simeq\sin^2(\frac{3}{11}\pi)$, 周期 5) を (1)式に与えた場合。　a) $n=0-100$,　b) $n=1610-1710$　c) $n=2030-2130$

とする。数値計算の結果は，初めは非周期解であるが (Fig. 4 −(a))，2156 ステップから周期 2412 の周期解になる (Fig. 4 −(b))。この非周期解から生じた周期解は，前の場合と同様に変わることなく安定である (Fig.4 −(c))。

数値計算の誤差から生ずるこれらの周期解は厳密解とはかけ離れた，いわば幻影解である。有効桁数を大きくとれば，数十ステップまで精度良く数値計算できる。[1)] しかし，それ以上のステップでは，有限の桁数を用いている限り，このような幻影解から逃れることはできない。

なお計算には一部 REDUCE 3.1 を用いた。

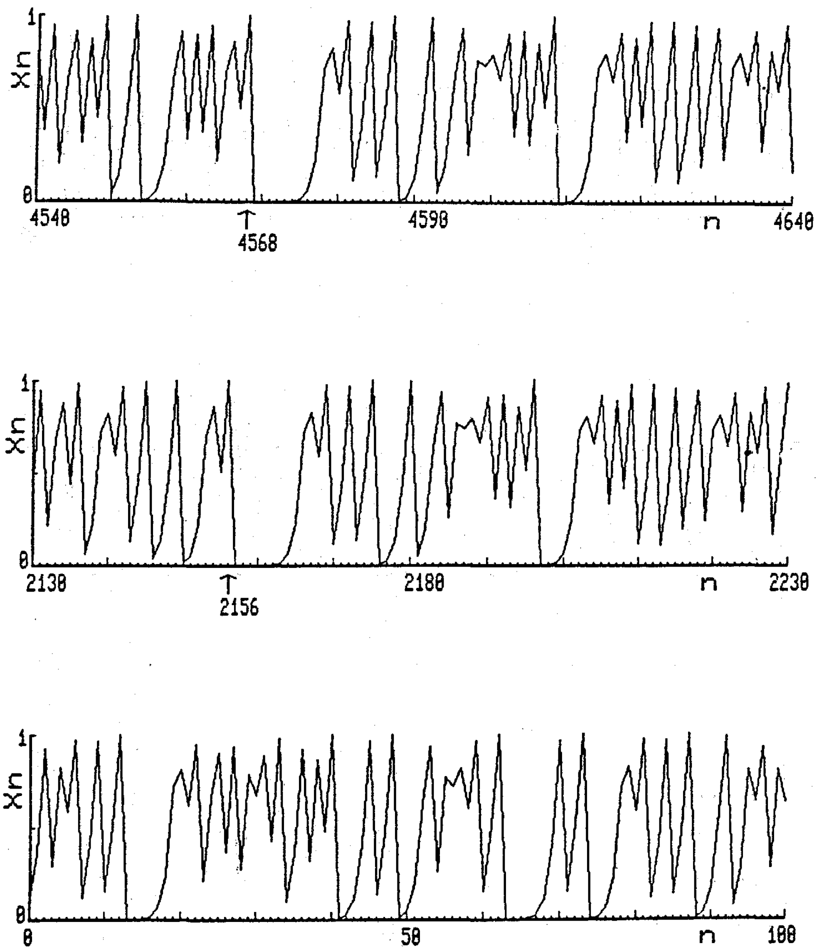

Fig. 4　カオス解をもつように初期値 $x_0 = 0.09999999$ を(1)式に与えた場合
a）$n = 0 - 100$，　b）$n = 2130 - 2230$，　c）$n = 4540 - 4640$

References

1) S. Katsura, W. Fukuda, Physica in press.

2) R. F. Byrd, M. D. Friedman, *Handbook of Elliptic Integrals.* (Springer–Verlag, 1971)

3) T. Tsuchiya, A. Szabo, N. Saitô, Z. Naturf., **38a** (1983) 1035.